

Členy binomického rozvoje

BINOMICKÁ VĚTA Pro každé a, b a každé $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \underbrace{\binom{n}{k} a^{n-k} b^k}_{\text{STRUČNÝ ZÁPIS}} = \underbrace{\binom{n}{0} a^n b^0}_{\text{1. člen}} + \dots + \underbrace{\binom{n}{k-1} a^{n-k+1} b^{k-1}}_{\text{k-tý člen}} + \underbrace{\binom{n}{k} a^{n-k} b^k}_{\text{(k+1) člen}} + \dots + \underbrace{\binom{n}{n} a^0 b^n}_{\text{(n+1) člen}}$$

PLATÍ:

$$\text{k-tý člen } A_k = \binom{n}{k-1} a^{n-(k-1)} b^{k-1} \quad \left[\text{(k+1) člen } A_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \right]$$

Příklady

① Určete

a) desátý člen binomického rozvoje $\left(5x^3 - \frac{\sqrt{2}}{x}\right)^{12}$

$$A_k = \binom{n}{k-1} a^{n-(k-1)} b^{k-1} \quad a=5x^3, \quad b=-\frac{\sqrt{2}}{x}, \quad n=12$$

$$\begin{aligned} \underbrace{A_{10}}_{k-1=9} &= \binom{12}{9} (5x^3)^{12-9} \left(-\frac{\sqrt{2}}{x}\right)^9 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 5^3 \cdot (x^3)^3 \cdot \left(-\frac{(\sqrt{2})^9}{x^9}\right) = \\ &= 220 \cdot 125x^9 \cdot \left(-\frac{2^4 \sqrt{2}}{x^9}\right) = -220 \cdot 125 \cdot 16\sqrt{2} = -440\,000 \cdot \sqrt{2} = -44 \cdot 10^4 \cdot \sqrt{2} \end{aligned}$$

b) čtvrtý člen binomického rozvoje výrazu $\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^5$

$$A_k = \binom{n}{k-1} a^{n-(k-1)} b^{k-1}$$

$$n=5, \quad a=\sqrt{x}, \quad b=\sqrt{y}$$

$$A_4 = \binom{5}{3} \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{5-3} \left(y^{\frac{1}{2}}\right)^3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2 \cdot y^{\frac{3}{2}} = 10 \cdot x \cdot y\sqrt{y} = 10xy\sqrt{y}$$

c) třetí člen binomického rozvoje $\left(x^5 - 2y^4\right)^4$

$$n=4, \quad a=x^5, \quad b=(-2y^4)$$

$$A_3 = \binom{4}{2} (x^5)^{4-2} (-2y^4)^2 = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \cdot (x^5)^2 \cdot (-2)^2 \cdot y^8 = 6 \cdot x^{10} \cdot 4 \cdot y^8 = 24x^{10}y^8$$

d) čtvrtý člen binomického rozvoje $\left(x^2 - 3y\right)^8$

$$n=8, \quad a=x^2, \quad b=(-3y)$$

$$A_4 = \binom{8}{3} (x^2)^{8-3} (-3y)^3 = -\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot (x^2)^5 \cdot 3^3 \cdot y^3 = -56 \cdot x^{10} \cdot 27 \cdot y^3 = -1\,512x^{10}y^3$$

② Určete, kolikátý člen binomického rozvoje výrazu

a) $(2x^{-1} - 3x^2)^8$ obsahuje x^4 a určete jeho hodnotu
 $n=8, a=2x^{-1}, b=(-3x^2)$

předp., že jde o člen $A_k = \binom{n}{k-1} a^{n-(k-1)} b^{k-1} = \binom{8}{k-1} (2x^{-1})^{8-k+1} (-3x^2)^{k-1} =$

$$= \binom{8}{k-1} 2^{8-k+1} (x)^{-1(8-k+1)} (-3)^{k-1} \cdot x^{2(k-1)} = \underbrace{\binom{8}{k-1} \cdot 2^{9-k} \cdot (-3)^{k-1}}_{\text{čísla}} \cdot \underbrace{(x)^{-9+k+2k-2}}_{\text{má být } x^4 \Rightarrow}$$

$$x^{-11+3k} = x^4 \quad [\text{exponec. rce } a^x = a^y \Leftrightarrow x = y]$$

$$-11 + 3k = 4$$

$$3k = 15$$

$$k = 5 \quad x^4 \text{ obsahuje člen PÁTÝ}$$

hodnota $A_5 = \binom{8}{5-1} \cdot 2^{9-5} \cdot (-3)^{5-1} \cdot \underbrace{x^{-11+3 \cdot 5}}_{x^4}$ (lze psát x^4 , ale lze pro kontrolu vypoč.)

$$A_5 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 2^4 \cdot 3^4 \cdot x^4 = 70 \cdot 16 \cdot 81 x^4 = 90\,720 x^4$$

b) je absolutní (prostý, tj. neobsahuje x , tj. obsahuje $x^0 (x^0 = 1)$) a určete jeho hodnotu

$$\left(2x^2 - \frac{3}{x}\right)^6$$

$a=2x^2, b=-\frac{3}{x}=-3x^{-1}, n=6$

předp., že jde o člen $A_k = \binom{n}{k-1} a^{n-(k-1)} b^{k-1} = \binom{6}{k-1} (2x^2)^{6-k+1} (-3x^{-1})^{k-1} =$

$$= \binom{6}{k-1} 2^{6-k+1} (x)^{2(6-k+1)} (-3)^{k-1} \cdot x^{-k+1} = \underbrace{\binom{6}{k-1} \cdot 2^{7-k} \cdot (-3)^{k-1}}_{\text{čísla}} \cdot \underbrace{(x)^{2(7-k)+(-k+1)}}_{\text{má být } x^0 \Rightarrow}$$

$$x^{2(7-k)-k+1} = x^0$$

$$x^{15-3k} = x^0$$

$$15 - 3k = 0$$

$$k = 5 \quad \text{absolutní člen je PÁTÝ člen}$$

hodnota

$$A_5 = \binom{6}{4} \cdot 2^{7-5} \cdot (-3)^{5-1} \cdot \underbrace{x^{2(7-5)+(-5+1)}}_{x^0} = \binom{6}{2} \cdot 2^2 \cdot 3^4 \cdot \underbrace{x^{4-4}}_{x^0} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} \cdot 4 \cdot 81 = 4\,860$$

③ Určete, pro která reálná čísla x je v binomickém rozvoji výrazu

a) sedmý člen roven 168 $\left(\frac{\sqrt[3]{4-2x}}{a} + \frac{\sqrt[6]{3-2x}}{b}\right)^9$ $\left[\begin{array}{ll} \text{lichá} & \text{sudá odm.} \\ \text{odmocnina} & 3-2x \geq 0 \\ \text{def. pro } \forall x \in R & x \leq \frac{3}{2} \end{array} \right]$

$$A_k = \binom{n}{k-1} a^{n-(k-1)} b^{k-1} \quad \underbrace{A_7}_{k-1=6} = 168 \quad (n=9)$$

$$\binom{9}{7-1} (\sqrt[3]{4-2x})^3 \cdot (\sqrt[6]{3-2x})^6 = 168 \quad \left[\binom{9}{6} = \binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 3 \cdot 4 \cdot 7 = 84 \right] \quad D = (-\infty, \frac{3}{2})$$

$$84(4-2x) \cdot (3-2x) = 168 \quad | :84$$

$$12 - 8x - 6x + 4x^2 = 2$$

$$4x^2 - 14x + 10 = 0 \quad x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 2 \cdot 5}}{4} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{4} = \frac{7 \pm 3}{4}$$

$$2x^2 - 7x + 5 = 0 \quad x_1 = \frac{10}{4} \notin D, \quad x_2 = 1 \in D \quad \text{pro } x = 1$$

b) čtvrtý člen roven -14 $\left(4x - \frac{1}{3x}\right)^8$ $A_k = \binom{n}{k-1} a^{n-(k-1)} b^{k-1}$

$$a=4x, \quad b=-\frac{1}{3x}, \quad n=8$$

$$A_4 = \binom{8}{4-1} (4x)^{8-(4-1)} \left(-\frac{1}{3x}\right)^{4-1} = -14$$

$$\left(\frac{8}{3}\right) (4x)^5 \left(-\frac{1}{3x}\right)^3 = -14 \quad [x \neq 0]$$

$$-\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 4^5 \cdot x^5 \cdot \frac{1}{3^3 \cdot x^3} = -14 \quad | :(-14)$$

$$\frac{4 \cdot 4^5 \cdot x^2}{3^3} = 1 \quad | \cdot 3^3$$

$$4^6 \cdot x^2 = 3^3 \quad | :4^6$$

$$x^2 = \frac{3^3}{4^6} \quad |x| = \sqrt{\frac{3^3}{4^6}} = \frac{3\sqrt{3}}{4^3} \quad x_{1,2} = \pm \frac{3\sqrt{3}}{64} \in D$$

④ Zaokrouhlete číslo $1,008^{10}$ na tisíciny

$$1,008^{10} = (1 + 0,008)^{10} = (1 + 8 \cdot 10^{-3})^{10} = [\text{vytvoříme součet tolika počátečních členů binom. rozvoje, kolik jich může ovlivnit číslici na místě desetitisícin}]$$

$$= \binom{10}{0} 1^{10} (8 \cdot 10^{-3})^0 + \binom{10}{1} 1^9 (8 \cdot 10^{-3})^1 + \binom{10}{2} 1^8 (8 \cdot 10^{-3})^2 + \binom{10}{3} 1^7 (8 \cdot 10^{-3})^3 +$$

$$+ \binom{10}{4} 1^6 (8 \cdot 10^{-3})^4 + \dots = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 10 \cdot 8 \cdot 10^{-3} + 45 \cdot 64 \cdot 10^{-6} + 120 \cdot 8^3 \cdot 10^{-9} +$$

$$+ 210 \cdot 8^4 \cdot 10^{-12} + \dots = 1 + 0,080 + 2\,880 \cdot 10^{-6} + 61\,440 \cdot 10^{-9} + 860\,160 \cdot 10^{-12} + \dots =$$

$$= 1 + 0,080 + 0,002\,880 + 0,000\,061\,440 + \underbrace{0,000\,000\,860\,160 + \dots}_{\text{jž neovlivní, dále neuvaž.}} =$$

$$\doteq 1,082\,941\,44 \doteq 1,083 \quad [\text{tedy } 1,082\,5 \leq 1,008^{10} < 1,083\,5]$$